

Normalenformen der Ebenengleichung

Einleitung:

Bisher haben wir eine Ebene im Raum durch einen Stützvektor $\vec{p}$ und zwei Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beschrieben. Eine einfachere Möglichkeit ist, die Ebene durch einen zur Ebene orthogonalen (im rechten Winkel) Vektor zu bestimmen. Dieser Vektor $\vec{n}$ wird als Normalenvektor bezeichnet, der orthogonal zu zwei gegebenen (linear unabhängigen) Spannvektoren der Ebene E ist.

Normalenform der Ebenengleichung:

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Koordinatengleichung der Ebene E:

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + x_3 \cdot a_3 = b$$

Koordinaten a_1, a_2, a_3 bilden Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E

Parameterform:

$$\text{Bsp.: } E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Stützvektor } \vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ der Ebene E}$$

$\vec{n}$ muss orthogonal (im rechten Winkel) zu den beiden Richtungsvektoren sein:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 0 \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 0$$

$$I \quad 1 \cdot n_1 + 0 \cdot n_2 + 2 \cdot n_3 = 0$$

$$II \quad 0 \cdot n_1 + (-5) \cdot n_2 + 8 \cdot n_3 = 0$$

Umformen

$$I \quad n_1 = -2n_3$$

$$II \quad n_2 = \frac{8}{5}n_3$$

$n_3 = 5$ setzen $\rightarrow$ daraus ergeben sich ganzzahlige Lösungen für $n_2 = 8$ und $n_1 = -10$

Übungsaufgaben:

1.) Wie lautet die Normalenform? Bestimme daraus die Koordinatengleichung.

$$\text{a) } E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2.) Setze die Koordinatengleichung in die Normalenform um.

$$\text{a) } x + y + z = 5$$

$$\text{b) } 5x - 4y = 0$$

$$\text{c) } x + z = 4$$

$$\text{d) } 4x + 3y = 12$$

3.) Gib die Normalenform an und schreibe diese anschließend als Koordinatengleichung.

$$\text{a) } \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \quad P(1/-2/-1)$$

$$\text{b) } \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad P(8/2/6)$$

4.) Gesucht ist eine zu E parallele Ebene F die durch P geht. Bestimme die Gleichung dieser Ebene F.

$$\text{a) } E : 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 8$$

$$P(-2/4/6)$$

Lösungen:

1.)

$$\text{a) } \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$/ \quad -n_1 + 3n_2 + n_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3n_2 + n_3 = n_1$$

$$II \quad -2n_2 + 2n_3 = 0 \quad | + 2n_2 | : 2$$

$$n_3 = 1 + n_2 \quad \Big| \text{ in } I$$

$$\Rightarrow 4n_2 = n_1 \quad \text{setze } n_1 = 8 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$n_2 = 2$$

$$n_3 = 2$$

$$\text{Normalenform:} \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Koordinatengleichung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 8x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$$

$$I \quad 2n_1 - 2n_2 + n_3 = 0 \rightarrow n_3 = \frac{2}{7}n_2$$

$$// \quad n_1 - 3n_3 = 0 \quad \rightarrow n_1 = 3n_3 \quad \Big| \text{ in } I$$

$$b) \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{setze } n_2 = 7$$

$$n_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$n_1 = 6$$

$$\text{Normalenform:} \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Koordinatenform: } 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 15$$

2.)

$$a) \quad x + y + z = 5 \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Normalenform:} \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$b) \quad 5x - 4y + 0z = 0 \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Normalenform:} \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{c)} \quad x + z = 4 \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Normalenform:} \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{d)} \quad 4x + 3y = 12 \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Normalenform:} \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

3.)

$$\text{a)} \quad \text{Nf.:} \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Kf.:} \quad -3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0$$

$$\text{b)} \quad \text{Nf.:} \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Kf.:} \quad 4x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 88$$

$$\text{4.)} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P(-2/4/6)$$

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \text{Gleichung der Ebene } F$$

Oder:

$$2x_1 + 4x_2 - x_3 = b \quad | \quad P \text{ einsetzen}$$

$$2 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 6 \quad \rightarrow \text{Gleichung der Ebene } F$$